EXERCICES SUR LES NOMBRES COMPLEXES

Exercice 1

1) $f(z)=\dfrac{z^2-1}{z(z+3)}$

$$f(1-i)=\frac{(1-i)^2-1}{(1-i)(1-i+3)}=\frac{1-2i-1-1}{4-i-4i^2-1}=-\frac{(1-2i)(3+5i)}{(3-5i)(3+5i)}=\frac{7}{34}-\frac{11}{34}i$$

$$f(\overline{z})=\frac{\overline{z}^2-1}{\overline{z}(\overline{z}+3)}=\frac{\overline{z^2}-1}{\overline{z}(\overline{z}+3)}=\frac{\overline{z^2-1}}{\overline{z(z+3)}}=\overline{\left(\frac{z^2-1}{z(z+3)}\right)}=\overline{f(z)}$$

Donc $f(1+i)=f(\overline{1-i})=\dfrac{7}{34}+\dfrac{11}{34}i$

2) $u=(2+i)^3+(1-2i)^3=8+12i-6-i+1-6i-12-8i=-9-2i$

3)a) $3(z-i)-3i(z-2+3i)=(i-1)(z+1)\Leftrightarrow 3z-3iz-iz+z=i-1-3i-9$

$$\Leftrightarrow z(4-4i)=-10-2i\Leftrightarrow z=\frac{-10-2i}{4-4i}$$

Or $\dfrac{-10-2i}{4-4i}=\dfrac{-5-2i}{2(1-i)}=-\dfrac{1}{2}\dfrac{(5+2i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}=-\dfrac{3}{4}-\dfrac{7}{4}i$ Donc $S=\{-\dfrac{3}{4}-\dfrac{7}{4}i\}$

b) $z-2\overline{z}=9+2i$ Pour résoudre cette équation on pose: $z=x+iy$, $\overline{z}=x-iy$

$z-2\overline{z}=9+2i\Leftrightarrow -x+3iy=9+2i\Leftrightarrow x=-9$ *et* $y=\dfrac{2}{3}$ d'où $z=-9+\dfrac{2}{3}i$

4) $Z=\dfrac{z-1+2i}{z-i}$ *avec* $z\neq i$. On pose $z=x+iy$ et $Z=X+iY$

a) Ensemble des points M(z) pour lesquels Le point M'(Z) appartient à l'axe des réels (E)

$$X+iY=\frac{x+iy-1+2i}{x+iy-i}=\frac{(x-1)+i(y+2)}{x+i(y-1)}=\frac{[(x-1)+i(y+2)][x-i(y-1)]}{[x+i(y-1)]\,.\,[x-i(y-1)]}$$

$$=\frac{(x-1)x+(y+2)(y-1)-i(x-1)(y-1)+ix(y+2)}{x^2+(y-1)^2}=\frac{x^2-x+y^2+y-2+i(3x+y-1)}{x^2+(y-1)^2}$$

$$=\frac{x^2-x+y^2+y-2}{x^2+(y-1)^2}\quad i\frac{3x+y-1}{x^2+(y-1)^2}$$

D'où $\mathrm{Re}(Z)=X=\dfrac{x^2-x+y^2+y-2}{x^2+(y-1)^2}$ et $\mathrm{Im}(Z)=Y=\dfrac{3x+y-1}{x^2+(y-1)^2}$

M' appartient à l'axe des réels signifie que $\mathrm{Im}(Z)=0\Leftrightarrow\dfrac{3x+y-1}{x^2+(y-1)^2}=0\Leftrightarrow 3x+y-1=0$

Donc (E) est la droite d'équation 3x + y - 1 = 0 privé de son point A d'affixe i.